

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
международной экономики и
внешнеэкономической деятельности



Ендовицкая Е.В.
16.06.2021 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.07 Линейная алгебра

- 1. Код и наименование направления подготовки:** 38.03.01 Экономика
- 2. Профиль подготовки:** Мировая экономика
- 3. Квалификация выпускника:** бакалавр
- 4. Форма обучения:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**
Международной экономики и внешнеэкономической деятельности
- 6. Составители программы:**
Гайворонская Светлана Анатольевна, кандидат технических наук, доцент
- 7. Рекомендована:**
НМС факультета международных отношений протокол №6 от 16.06.2021 г.
- 8. Учебный год:** 2021 - 2022 **Семестр:** 2
- 9. Цели и задачи учебной дисциплины**

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- формирование у обучающихся устойчивых знаний, умений и навыков по применению математических моделей и методов линейной алгебры к решению теоретических и практических задач, к исследованию прикладных вопросов экономики;
- развитие логического мышления и математической культуры;
- формирование необходимого уровня алгебраической подготовки для понимания других математических и прикладных дисциплин.

Задачи учебной дисциплины:

- изучение обучающимися основных понятий и методов линейной алгебры;
- формирование у обучающихся навыков и умений решения типовых задач данного курса;

- овладение обучающимися теоретическими и методологическими основами моделирования с использованием моделей и методов линейной алгебры;
- применение обучающимися методов линейной алгебры и навыков моделирования для решения прикладных задач экономической теории;
- овладение обучающимися современными приемами математического моделирования с использованием универсальных программных средств.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: дисциплина относится к обязательной части блока Б1.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять знания (на промежуточном уровне) экономической теории при решении прикладных задач	ОПК-1.2	Применяет аппарат фундаментальной математики при решении теоретических и практических задач экономической теории	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> – основные теоретические положения линейной алгебры в рамках изучаемых разделов, применяемые в экономике. – особенности и области применения линейной алгебры для решения профессиональных задач. <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> – решать практические задачи методами линейной алгебры в рамках изучаемых разделов; – анализировать информацию, необходимую для решения поставленной экономической задачи инструментами линейной алгебры. <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> – навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач; – навыками обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей; <p>навыками анализа результатов расчетов и обоснования полученных выводов.</p>
		ОПК-1.4	Использует математические методы и модели оптимизации при решении прикладных задач экономической теории	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> – основы математических методов моделирования экономических систем; – особенности и области применения линейной алгебры для решения профессиональных задач. <p>Уметь: применять методы линейной алгебры для решения профессиональных задач.</p> <p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> – навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач; – навыками обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей; <p>навыками анализа результатов расчетов и обоснования полученных выводов.</p>

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. 4/144.

Форма промежуточной аттестации: экзамен

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
			1 семестр	2 семестр
Аудиторные занятия		68	-	68
в том числе:	лекции	34	-	34
	практические	34	-	34
	лабораторные	-	-	-
Самостоятельная работа		40	-	40
в том числе: курсовая работа (проект)			-	-
Форма промежуточной аттестации (экзамен – час.)		36	-	36
Итого:		144	-	144

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
1. Лекции			
1.1	Матрицы.	Матрицы. Виды матриц (квадратная, нулевая, единичная, диагональная, симметрическая). Операции над матрицами (умножение на число, сложение, умножение, возведение в степень, транспонирование). Свойства операций.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-2
1.2	Определители.	Определитель матрицы, его свойства. Методы вычисления определителей. Миноры. Алгебраическое дополнение. Теорема Лапласа.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-3
1.3	Обратная матрица. Ранг матрицы.	Обратная матрица. Алгоритм нахождения обратной матрицы. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы. Эквивалентные матрицы. Ступенчатый вид матрицы. Базисный минор.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-4
1.4	Общий вид и свойства системы линейных уравнений.	Определение системы линейных уравнений. Совместные, несовместные, определенные, неопределенные системы линейных уравнений. Равносильные системы линейных уравнений. Матричная форма системы линейных уравнений. Метод обратной матрицы.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-5
1.5	Метод Крамера. Метод Гаусса.	Метод Крамера. Метод Гаусса. Система m линейных уравнений с n неизвестными. Теорема Кронекера-Капелли. Базисные и свободные переменные. Общее, частное и базисное решение систем линейных уравнений.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-6
1.6	Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.	Определение системы линейных однородных уравнений, фундаментальной системы решений. Теорема об общем решении системы линейных однородных уравнений.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-6
1.7	Модель многоотраслевой экономики Леонтьева.	Линейные балансовые системы в экономике на примере модели многоотраслевой экономики Леонтьева. Продуктивные модели Леонтьева. Критерии продуктивности модели Леонтьева.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-8
1.8	Векторное пространство.	Векторы на плоскости и в пространстве. Операции над векторами, коллинеарные векторы. Скалярное произведение векторов, его свойства. Проекция вектора на ось. Понятие n -мерного вектора. Векторное пространство. Размерность и базис векторного пространства. Евклидово пространство.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-10

1.9	Линейная зависимость векторов. Базис и ранг системы векторов.	Линейная комбинация векторов. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Свойства линейно зависимой системы векторов. Базис и ранг системы векторов. Разложение векторов по базису. Матрица перехода от одного базиса к другому.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-10
1.10	Линейные операторы.	Определение линейного оператора. Матрица линейного оператора. Теорема о связи матрицы одного и того же оператора для разных базисов.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-10
1.11	Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.	Определение собственного значения и собственного вектора линейного оператора. Характеристическое уравнение линейного оператора. Свойства собственных значений матрицы линейного оператора. Диагональная форма матрицы линейного оператора.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-10
1.12	Квадратичные формы	Определение квадратичной формы. Матрица квадратичной формы. Преобразование квадратичной формы. Канонический и нормальный вид квадратичной формы. Метод Лагранжа. Закон инерции квадратичных форм. Положительно (отрицательно) определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Линейная модель торговли.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-10
1.13-1.14	Элементы аналитической геометрии	Системы координат. Уравнение прямой: с угловым коэффициентом, общее, в отрезках. Уравнение пучка прямых, уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Окружность: определение, каноническое уравнение и свойства. Эллипс: определение, каноническое уравнение и свойства. Гипербола: определение, каноническое уравнение и свойства. Парабола: определение, каноническое уравнение и свойства. Общая теория кривых 2-го порядка. Плоскость: общее уравнение, понятие нормального вектора. Частные случаи расположения плоскости в координатном пространстве. Угол между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Прямая в пространстве: понятие направляющего вектора, каноническое уравнение прямой, общее уравнение. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между прямыми. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Обзор поверхностей 2-го порядка.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-13
1.15	Элементы выпуклого анализа	Выпуклые множества в пространстве R^n . Полупространства, выпуклые многогранные области. Системы линейных неравенств и их геометрический смысл. Угловые точки выпуклых многогранных областей. Геометрические примеры крайних (угловых) точек. Базисные и небазисные компоненты крайней точки. Алгебраическая характеристика крайней точки полиэдра (многогранника). Выпуклая оболочка системы точек в R^n	
1.16	Классификация задач и моделей математического программирования.	Линейное, нелинейное, выпуклое, невыпуклое, целочисленное, частично – целочисленное, стохастическое и динамическое программирование. Модель транспортной задачи. Модель планирования производства на предприятии. Модель задачи о диете. Модель задачи о назначении. Линейная модель обмена.	

1.17	Начальные сведения о методах оптимизации. Теория двойственности.	Примеры экономико-математических моделей, приводящих к задачам линейного программирования. Математическая постановка задачи линейного программирования. Общая, стандартная и каноническая задача линейного программирования. Приведение задачи линейного программирования к каноническому виду. Запись задачи линейного программирования в матричном виде. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в случае двух переменных. Графический метод решения. Решение задач линейного программирования методом перебора вершин. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Алгоритм симплекс-метода. Нахождение исходного допустимого базиса. Метод искусственного базиса. Понятие о взаимно-двойственных задачах линейного программирования. Основные теоремы двойственности.	
2. Практические занятия			
2.1	Матрицы. Операции над матрицами.	Операции над матрицами (умножение на число, сложение, умножение, транспонирование). Свойства операций. Решение задач с экономическим содержанием, с использованием изученных операций над матрицами.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-2
2.2	Определители, методы их вычисления.	Вычисление определителей второго и третьего порядка: методом треугольника; с использованием свойств определителя, с использованием теоремы Лапласа. Вычисление определителей высших порядков.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-3
2.3	Обратная матрица.	Нахождение обратной матрицы с помощью присоединенной матрицы и с помощью элементарных преобразований.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-4
2.4	Ранг матрицы.	Нахождение ранга матрицы. Определение максимального числа линейно независимых строк (столбцов) матрицы.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-4
2.5	Системы линейных уравнений. Метод Крамера. Метод обратной матрицы.	Решение матричных уравнений. Решение системы линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы. Решение задач с экономическим содержанием, с использованием систем линейных уравнений.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-5
2.6	Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Метод Жордана-Гаусса.	Решение системы линейных уравнений методом Гаусса, методом Жордана-Гаусса. Решение задач с экономическим содержанием, с использованием систем линейных уравнений.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-6
2.7	Общее и базисное решение систем линейных уравнений. Система фундаментальных решений системы линейных однородных уравнений.	Нахождение общего и базисного решения систем линейных уравнений. Нахождение фундаментальной системы решений системы линейных уравнений.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-6
2.8	Модель Леонтьева.	Определение продуктивности матрицы. Решение задач с применением модели многоотраслевой экономики Леонтьева.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-8
2.9	Векторное пространство.	Операции над векторами. Скалярное произведение векторов, его свойства. Определение линейной зависимости и независимости векторов. Разложение векторов по базису. Матрица перехода от одного базиса к другому.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-10
2.10	Линейные операторы.	Определение линейности оператора. Нахождение матрицы линейного оператора. для разных базисов.	https://edu.vsu.ru/course/view.p

			hp?id=4764#section-10
2.11	Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.	Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-10
2.12	Линейная модель торговли.	Нахождение соотношений национальных доходов стран для сбалансированной торговли.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-10
2.13	Квадратичные формы.	Нахождение квадратичной формы соответствующей заданной матрице. Определение квадратичной формы в матричном виде. Канонический и нормальный вид квадратичной формы. Метод Лагранжа. Исследование квадратичной формы на знакоопределенность. Критерий Сильвестра.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-10
2.14.	Элементы аналитической геометрии.	Уравнение прямой: с угловым коэффициентом, общее, в отрезках. Уравнение пучка прямых, уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола. Плоскость: общее уравнение, понятие нормального вектора. Частные случаи расположения плоскости в координатном пространстве. Угол между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Прямая в пространстве: каноническое уравнение прямой, общее уравнение. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между прямыми. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Решение задач с экономическим содержанием, с использованием элементов аналитической геометрии.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764#section-13
2.15.	Элементы выпуклого анализа.	Системы линейных неравенств и их геометрический смысл. Угловые точки выпуклых многогранных областей. Геометрические примеры крайних (угловых) точек. Базисные и небазисные компоненты крайней точки. Алгебраическая характеристика крайней точки полиэдра (многогранника).	
2.16.	Задачи математического программирования.	Задача об использовании ресурсов. Задачи о диете. Задача о загрузке оборудования. Линейная модель обмена.	
2.17.	Методы оптимизации.	Решение задач линейного программирования.	

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Самостоятельная работа	Контроль	Всего
1.	Матрицы. Определители.	6	8	6		20
2.	Системы линейных уравнений.	8	8	6		22
3.	Векторы.	6	6	8		20
4.	Квадратичные формы	4	2	6		12
5.	Элементы аналитической геометрии. Элементы выпуклого анализа.	6	6	6		18
6.	Классификация задач и моделей математического программирования. Начальные сведения о методах оптимизации. Теория двойственности.	4	4	8		16
	Контроль:				36	36
	Итого:	34	34	40	36	144

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

Для освоения дисциплины обучающимся необходимо работать с лекционными материалами (конспектами лекций) и практическими заданиями, размещенными на образовательном портале ЭУК «Мировая экономика. Линейная алгебра»/ - URL: <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764>, основной и дополнительной литературой, выполнять задания на практических занятиях и в процессе самостоятельной работы, пройти текущие аттестации.

Дополнительные методические рекомендации по выполнению практических заданий, а также замечания по результатам их выполнения могут размещаться на портале ЭУК «Мировая экономика. Линейная алгебра»/ - URL: <https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764> в виде индивидуальных комментариев и файлов обратной связи, сообщений форума и других элементов электронного курса.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	<i>Высшая математика для экономистов : учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ; ред. Н.Ш. Кремер. – 3-е изд. – Москва : Юнити, 2015. – 482 с. : граф. – (Золотой фонд российских учебников). – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114541. – ISBN 978-5-238-00991-9</i>
2	<i>Горлач, Б. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник / Б. А. Горлач. — Санкт-Петербург : Лань, 2017. — 300 с. — ISBN 978-5-8114-2717-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/99103</i>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	<i>Высшая математика. Практикум для студентов технических и экономических специальностей : учебное пособие / Г. Н. Горелов, Б. А. Горлач, Н. Л. Додонова [и др.] ; под общей редакцией Б. А. Горлача. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 676 с. — ISBN 978-5-8114-4423-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/140738</i>
4	<i>Ильин, В.А. Линейная алгебра : учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 6-е изд., стереотип. – Москва : Физматлит, 2010. – 278 с. – (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68974. – ISBN 978-5-9221-0481-4</i>
5	<i>Лобкова Н.И., Максимов Ю.Д., Хватов Ю.А. Высшая математика для экономистов и менеджеров : Учебное пособие. - [Электронный ресурс] / Под ред. Ю.А. Хватова. – СПб.: Издательство «Лань», 2018. – 520 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/reader/book/110909/#2</i>
6	<i>Балдин, К.В. Математическое программирование : учебник / К.В. Балдин, Н.А. Брызгалов, А.В. Рукосуев ; под общ. ред. К.В. Балдина. – 2-е изд. – Москва : Дашков и К°, 2018. – 218 с. : ил. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=112201. – ISBN 978-5-394-01457-4</i>

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Источник
1	<i>Каталог ЗНБ ВГУ. – URL: https://lib.vsu.ru/</i>
2	<i>ЭБС Издательства «Лань» – <URL:http://www.e.lanbook.com/</i>
3	<i>ЭБС «Университетская библиотека Online» – <URL:http://www.biblioclub.ru/</i>
4	<i>Гайворонская С.А. ЭУК «Мировая экономика. Линейная алгебра»/ - URL: https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764</i>
5	<i>Евростат. – URL: https://ec.europa.eu/eurostat</i>
6	<i>Мировая статистика. – URL: https://world-statistics.org/</i>

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	<i>Конспекты лекций, размещенные ЭУК «Мировая экономика. Линейная алгебра»/ - URL: https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764</i>

2	Задания для практических занятий, размещенные на ЭУК «Мировая экономика. Линейная алгебра»/ - URL: https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4764
---	--

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина реализуется с применением элементов электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (ЭОиДОТ) («Электронный университет»).

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специализированная мебель, проектор, ноутбук, экран

Программное обеспечение

Office Standard 2019 Single OLV NL Each Academic Edition Additional Product,

Win Pro 10 32-bit/64-bit All Lng PK Lic Online DwnLd NR

Неисключительные права на ПО Dr. Web Enterprise Security Suite Комплексная защита Dr. Web Desktop Security Suite

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Матрицы. Определители.	ОПК-1 Способен применять знания (на промежуточном уровне) экономической теории при решении прикладных задач	ОПК-1.2 Применяет аппарат фундаментальной математики при решении теоретических и практических задач экономической теории	<i>Практические задания Теоретический опрос №1 Контрольная работа №1</i>
2.	Системы линейных уравнений.		ОПК-1.2 ОПК-1.4	<i>Практические задания Теоретический опрос №1 Контрольная работа №2</i>
3.	Векторы.		ОПК-1.2 ОПК-1.4	<i>Практические задания Теоретический опрос №2 Контрольная работа №3</i>
4.	Квадратичные формы		ОПК-1.2	<i>Практические задания Контрольная работа №3</i>
5.	Элементы аналитической геометрии. Элементы выпуклого анализа.		ОПК-1.4	<i>Практические задания</i>
6.	Классификация задач и моделей математического		ОПК-1.4	<i>Практические задания</i>

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
	программирования. Начальные сведения о методах оптимизации. Теория двойственности.			
Промежуточная аттестация, форма контроля – экзамен				<i>Перечень вопросов, пример КИМ приведены в п.20.2</i>

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

20.1.1 Перечень практических заданий

1. Выполнять операции над матрицами.
2. Вычислять определители (метод треугольника, правило Лапласа).
3. Находить обратную матрицу (2 способа).
4. Находить ранг матрицы.
5. Решить матричное уравнение.
6. Решать систему уравнений, методом Крамера, Гаусса, Жордана-Гаусса.
7. Находить базисные решения системы линейных уравнений.
8. Находить фундаментальную систему решений системы линейных уравнений.
9. Выяснить продуктивна ли матрица.
10. Вычислять необходимый объем валового выпуска по отраслям (модель Леонтьева).
11. Определять образуют ли векторы базис.
12. Разложить вектор по векторам базиса.
13. Выяснить являются ли векторы линейно зависимыми (независимыми).
14. Проверить является ли оператор линейным.
15. Находить матрицу оператора в новом базисе.
16. Находить собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
17. Находить соотношение национальных доходов стран для сбалансированной торговли.
18. Находить квадратичную форму, соответствующую матрице.
19. Приводить к каноническому виду квадратичную форму.
20. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму.
21. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от данной точки и от данной прямой.
22. Даны вершины треугольника. Составить уравнение медианы и высоты, проведенной из вершины данного угла; уравнение биссектрисы данного внутреннего угла.
23. Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и данную точку.
24. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярно плоскости, проходящей через три данные точки.
25. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок данной прямой, отсекаемый данной гиперболой.
26. Для производства двух видов изделий *A* и *B* предприятие использует три вида сырья. Другие условия задачи приведены в таблице.

Вид сырья	Нормы расходы сырья на одно изделие, кг		Общее количество сырья, кг
	<i>A</i>	<i>B</i>	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия, ден.ед.	30	40	

Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации продукции будет максимальной при условии, что изделий *B* надо выпустить не менее, чем изделий *A*.

27. Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов кормов I и II. Один килограмм корма I стоит 80 ден. Ед. и содержит: 1 ед. жиров, 3 ед. белков, 1 ед. углеводов, 2 ед. нитратов. Один килограмм корма II стоит 10 ден. ед. и содержит: 3 ед. жиров, 1 ед. белков, 8 ед. углеводов, 4 ед. нитратов. Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий жиров не менее 6 ед., белков не менее 9 ед., углеводов не менее 8 ед., нитратов не менее 16 ед.

28. На двух автоматических линиях выпускают аппараты трех типов. Другие условия задачи приведены в таблице.

Тип аппарата	Производительность работы линий, шт. в сутки		Затраты на работу линий, ден. ед. в сутки		План, шт.
	1	2	1	2	
A	4	3	400	300	50
B	6	5	100	200	40
C	8	2	300	400	50

Составить такой план загрузки станков, чтобы затраты были минимальными, а задание выполнено не более чем за 10 суток.

20.1.2 Письменные теоретические опросы

Теоретический опрос №1. Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений.

1. Определение матрицы.
2. Определение квадратной матрицы.
3. Свойства операций суммирования матриц.
4. Найти те произведения матриц AB и BA , которые существуют, объяснить

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

5. Определение операции транспонирования матрицы, свойства.
6. Определение определителя второго порядка.
7. Свойства определителя.
8. Вычислить определитель матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

9. Определение минора элемента матрицы.
10. Вычислить алгебраическое дополнение выделенного элемента в пункте 8.
11. Определение обратной матрицы.
12. Определение совместной системы линейных уравнений.
13. Определение определенной системы линейных уравнений.
14. Определение ранга матрицы.
15. Правило Крамера.
16. Что означает линейная зависимость строк матрицы.
17. Определение системы линейных однородных уравнений.
18. Уравнение линейного межотраслевого баланса.
19. Соотношение баланса.

Теоретический опрос №2. Векторы. Квадратичные формы.

1. Что такое скалярная величина.
2. Определение коллинеарных векторов. Условие коллинеарности.
3. Длина вектора.
4. Определение суммы векторов (аналитически, графически).
5. Определение скалярного произведения векторов.
6. Формула для определения угла между векторами.
7. Закончите предложение: « n -мерное векторное пространство является линейным так как...».
8. Определение евклидова линейного векторного пространства.
9. Определение линейной комбинации векторов.
10. Определение линейно-независимой системы векторов.
11. Геометрический смысл линейной зависимости в случае двумерных векторов.
12. Определение ранга системы векторов.
13. Теорема о базисе системы векторов.
14. Определение линейного отображения.
15. Связь между вектором и его образом в векторной форме.
16. Определение собственного значения матрицы.
17. Характеристическое уравнение оператора.
18. Критерий Сильвестра.

Теоретические опросы проводятся в письменной форме.

Для оценивания результатов используется 4-х балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания	Шкала оценок
Правильные ответы $\geq 90\%$	Отлично
Правильные ответы от 75% до 90%	Хорошо
Правильные ответы от 60% до 75%	Удовлетворительно
Правильные ответы $< 60\%$	Неудовлетворительно

20.1.3 Контрольные работы

Контрольная работа №1. Матрицы. Определители.

1. Два различных по качеству вида масла продаются в трех магазинах. Матрица A задает объемы продаж этих продуктов в магазинах в первом квартале, матрица B - во втором квартале (тыс. руб.). Определить: 1) объем продаж за полугодие, 2) прирост продаж во втором квартале по сравнению с первым

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Найти матрицу C^{-1} , обратную к матрице $C = AB' + 2E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \\ -3 & -10 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

4. Определить максимальное число линейно независимых строк матрицы:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & -5 & 2 & -8 & -11 \\ 2 & 4 & 2 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

5. Предприятие производит три типа продукции, используя два вида ресурсов. Норма затрат ресурсов i -го вида на производство единицы продукции j -го типа задана матрицей затрат A , выпуск продукции за квартал – матрицей X , стоимость единицы каждого вида ресурса задана матрицей P . Найти: 1) Матрицу S полных затрат ресурсов каждого вида; 2) полную стоимость всех затраченных ресурсов.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Контрольная работа №2. Система линейных уравнений.

1. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Методом Гаусса решить систему уравнений, заданную в матричной форме: $AX=B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = (4 \ 6 \ 2 \ 4).$$

3. Решить системы уравнений методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

4. Найти фундаментальную систему решений системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$

5. Дана матрица полных затрат $S = \begin{pmatrix} 1,125 & 0,125 \\ 0,125 & 1,125 \end{pmatrix}$ и вектор конечного продукта $Y = \begin{pmatrix} 80 \\ 80 \end{pmatrix}$. Найти компоненты x_1, x_2 вектора валового выпуска $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа №3. Векторы. Квадратичные формы.

1. Выяснить являются ли линейно зависимыми векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$: $\bar{a}_1 = (1, 4, 6)$, $\bar{a}_2 = (1, -1, 1)$, $\bar{a}_3 = (1, 1, 3)$.

2. Даны четыре вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ и \bar{b} в некотором базисе. Показать, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образуют базис, и найти координаты вектора \bar{b} в этом базисе: $\bar{a}_1 = (4, 5, 2)$, $\bar{a}_2 = (3, 0, 1)$, $\bar{a}_3 = (-1, 4, 2)$, $\bar{b} = (5, 7, 8)$.

3. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора \tilde{A} (матрицы A).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Привести к каноническому виду квадратичную форму $\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$.

Выяснить, является ли она знакоопределенной.

5. Выяснить, в каком отношении должны быть национальные доходы трех стран для сбалансированной торговли, если задана структурная матрица торговли

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,8 \\ 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Контрольные работы проводятся в письменной форме.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-х балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания	Шкала оценок
Правильно решено 5 заданий, возможны некоторые неточности.	Отлично
Правильно решено 4 задания, возможны некоторые неточности.	Хорошо
Правильно решено 3 заданий, возможны некоторые неточности.	Удовлетворительно
Правильно решено менее 3 заданий, допущены грубые ошибки.	Неудовлетворительно

20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Перечень вопросов к экзамену:

1. Определение матрицы. Квадратная матрица. Диагональная матрица. Единичная матрица. Нулевая матрица. Равные матрицы. Симметрические матрицы.
2. Действия с матрицами. Свойства операций суммирования матриц и произведения матрицы на число. Свойства произведения матриц.
3. Определитель матрицы. Свойства определителя.
4. Миноры и алгебраические дополнения. Правило Лапласа.
5. Определение операции транспонирования матрицы, свойства.
6. Обратная матрица. Алгоритм нахождения обратной матрицы. Два способа нахождения обратной матрицы (с помощью присоединенной матрицы и с помощью элементарных преобразований).
7. Общий вид и свойства системы линейных уравнений. Совместная (несовместная) система линейных уравнений. Определенная (неопределенная) система линейных уравнений. Расширенная матрица системы.
8. Ранг матрицы. Элементарные преобразования, сохраняющие ранг матрицы.
9. Линейная зависимость (независимость) строк матрицы. Линейная комбинация.
10. Формулы Крамера.
11. Метод Гаусса.
12. Система m линейных уравнений с n неизвестными. Теорема Кронекера-Капелли.
13. Система линейных однородных уравнений.
14. Фундаментальная система решений системы линейных уравнений.
15. Модель Леонтьева. Балансовые соотношения.
16. Понятие n -мерного вектора. Векторное пространство. Равные векторы. Нулевой вектор.
17. Операции над векторами. Свойства.
18. Линейное векторное пространство.
19. Скалярное произведение векторов.
20. Линейная зависимость векторов. Линейная комбинация векторов. Свойства. Геометрический смысл.
21. Базис и ранг системы векторов.
22. Представление вектора в произвольном базисе.
23. Разложение вектора в ортогональном базисе.
24. Оператор линейного преобразования.
25. Линейные операторы.
26. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Свойства.
27. Диагональная форма линейного оператора.
28. Квадратичные формы.
29. Преобразование квадратичных форм.
30. Канонический и нормальный вид квадратичных форм.
31. Критерий знакоопределенности квадратичной формы.
32. Линейная модель обмена.
33. Линии первого порядка.
34. Эллипс.
35. Гипербола.
36. Парабола.
37. Общее уравнение линии второго порядка.
38. Уравнение поверхности и линии.
39. Плоскость в пространстве.
40. Прямая в пространстве.
41. Взаимное расположение прямой и плоскости.
42. Эллипсоид.
43. Гиперболоид.
44. Выпуклые множества в пространстве R^n . Полупространства, выпуклые многогранные области.
45. Системы линейных неравенств и их геометрический смысл.
46. Угловые точки выпуклых многогранных областей. Геометрические примеры крайних (угловых) точек.
47. Базисные и небазисные компоненты крайней точки.
48. Алгебраическая характеристика крайней точки полиэдра (многогранника).
49. Выпуклая оболочка системы точек в R^n .
50. Линейное, нелинейное, выпуклое, невыпуклое, целочисленное, частично – целочисленное, стохастическое и динамическое программирование.
51. Модель транспортной задачи.
52. Модель планирования производства на предприятии.
53. Модель задачи о диете.
54. Линейная модель обмена.

55. Примеры экономико-математических моделей, приводящих к задачам линейного программирования.
56. Математическая постановка задачи линейного программирования. Общая, стандартная и каноническая задача линейного программирования.
57. Приведение задачи линейного программирования к каноническому виду.
58. Запись задачи линейного программирования в матричном виде.
59. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в случае двух переменных.
60. Графический метод решения.
61. Решение задач линейного программирования методом перебора вершин.
62. Симплекс-метод решения задач линейного программирования.
63. Алгоритм симплекс-метода.
64. Нахождение исходного допустимого базиса.
65. Метод искусственного базиса.
66. Понятие о взаимно-двойственных задачах линейного программирования. Основные теоремы двойственности.

Пример контрольно-измерительного материала

УТВЕРЖДАЮ
 заведующая кафедрой международной экономики и внешнеэкономической деятельности
 Е.В. Ендовицкая

 подпись

___ __ 202_ г.

Направление подготовки 38.03.01 «Экономика»
 Дисциплина Линейная алгебра
 Курс 1
 Форма обучения очная
 Вид аттестации промежуточная
 Вид контроля экзамен

Контрольно-измерительный материал №1.

1. Дайте определение диагональной, симметрической матриц.

2. Найдите значение многочлена $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Ранг матрицы A размера $m \times m$ равен:
 - a. m
 - b. $m - 1$
 - c. указанных условий недостаточно для определения ранга
 - d. m , если матрица невырожденная
 - e. m , если матрица вырожденная

4. Найдите число линейно независимых строк матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Найдите определитель матрицы $B = A \cdot A'$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Решите систему уравнений методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16 \end{cases}$.

7. Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ вычисляется по формуле:

a. $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ b. $\vec{a}\vec{b} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}$ c. $\vec{a}\vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2$ d. $\vec{a}\vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$

8. Запишите квадратичную форму, соответствующую матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Предприятие выпускает три вида продукции, используя два вида сырья, нормы расходов сырья на единицу продукции задаются матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, стоимость единицы каждого вида сырья выражается матрицей $P = (2, 3)$, выпуск товаров задается матрицей $N' = (1 \ 1 \ 2)$. Определите денежные расходы предприятия на осуществление выпуска товаров.

10. Укажите верное соответствие между различными видами уравнения прямой и их формой записи:

- | | |
|---|--|
| a. $y - y_1 = k(x - x_1)$ | a. уравнение прямой в отрезках |
| b. $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$ | b. уравнение прямой с угловым коэффициентом |
| c. $y = kx + b$ | c. общее уравнение прямой |
| d. $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ | d. уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом k , проходящей через заданную точку $M_1(x_1, y_1)$ |
| e. $Ax + By + Cz + D = 0$ | e. уравнение прямой, проходящей через две заданные точки на плоскости $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ |
| f. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ | |

11. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

12. Даны четыре вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ и \bar{b} в некотором базисе. Укажите координаты вектора $\bar{b} = (5, 7, 8)$ в базисе $\bar{a}_1 = (4, 5, 2), \bar{a}_2 = (3, 0, 1), \bar{a}_3 = (-1, 4, 2)$:

13. Найдите расстояние между параллельными прямыми $3x + 4y - 24 = 0$ и $3x + 4y + 6 = 0$.

14. Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ задается формулой:

- | | |
|---|---|
| a. $d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$ | b. $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ |
| c. $d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ | d. $d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ |
| e. $d = \sqrt{A(x - x_0)^2 + B(y - y_0)^2}$ | |

15. Какая из данных прямых перпендикулярна прямой $2x - y + 3 = 0$:

- a. $4x + 8y + 17 = 0$
 б. $4x - 8y - 11 = 0$
 в. $y = -\frac{1}{2}x + 5$

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-х балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения.

Критерии оценивания	Шкала оценок
Правильно решено 14-15 заданий, возможны некоторые неточности.	Отлично
Правильно решено 12-13 заданий, возможны некоторые неточности.	Хорошо
Правильно решено 8-11 заданий, возможны некоторые неточности.	Удовлетворительно
Правильно решено менее 8 заданий, допущены грубые ошибки.	Неудовлетворительно